Gewinnfunktion

1. Grundlagen

2. Gewinnmaximum

3. grafische Darstellung

Gewinnfunktion › 1. Grundlagen

- **Gewinn:** Differenz von Umsatz und Kosten pro Periode

- **Gewinnfunktion:** funktionale Beziehung zwischen Gewinn (G), Umsatz (U) und Kosten (K) pro Periode

$$G(x) = U(x) - K(x) = a * x - b * x^2 - (c + d * x)$$

$$G(p) = U(p) - K(p) = \alpha * p - \beta * p^2 - \left(c + d * (\alpha - \beta * p)\right)$$

  - **beachte:** $-(c + d * x) = -c - d * x$

  - **auf Grundlage multiplikativer Umsatzfunktion:**

$$G(x) = U(x) - K(x) = a * x^{b+1} - (c + d * x)$$

$$G(p) = U(p) - K(p) = \alpha * p^{\beta+1} - \left(c + d * \left(\alpha * p^{\beta}\right)\right)$$

Gewinnfunktion › Aufgabe 1

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

Aufgabe 1: Eine Unternehmen verkauft 4.000 Produkte pro Woche, zu je 60 €. Die variablen Stückkosten betragen 25 € und die Fixkosten 80.000 € pro Monat. Wie groß ist der Gewinn der Unternehmens pro Jahr?

- $x_{Jahr} = 4.000 * 52 = 208.000$
- $U_{Jahr} = 60 * 208.000 = 12.480.000\ €$
- $c_{Jahr} = 80.000 * 12 = 960.000\ €$
- $G_{Jahr} = 12.480.000 - 960.000 - 25 * 208.000$
- $G_{Jahr} = \underline{6.320.000\ €}$

Antwort: Das Unternehmen erzielt einen Gewinn von 6.320.000 € pro Jahr.

Gewinnfunktion › Aufgabe 1

Aufgabe 1: Eine Unternehmen verkauft 4.000 Produkte pro Woche, zu je 60 €. Die variablen Stückkosten betragen 25 € und die Fixkosten 80.000 € pro Monat. Wie groß ist der Gewinn der Unternehmens pro Jahr?

Zusatzaufgabe: Wie lautet die Gewinnfunktion, wenn $a = 100$ und $b = 1/5.200$ gelten?

- $G = 6.320.000,\ x = 208.000,\ c = 960.000$
- $\underline{6.320.000 = 100 * 208.000 - \frac{1}{5.200} * 208.000^2 - 960.000 - 25 * 208.000}$

Aufgabe 2: Ein Unternehmen erzielte im vergangenen Monat einem Umsatz von 87.500 € durch den Verkauf von 17.500 Produkten. Das Unternehmen nimmt an, maximal 20.000 Produkte pro Monat verkaufen zu können. Wie groß ist der Gewinn des Unternehmens in diesem Monat, nachdem das Unternehmen seinen Preis um 20 % erhöht hat? Die gesamten Stückkosten betragen 3,25 € und es liegen lineare Zusammenhänge zugrunde, die über die Monate gleich bleiben.

1. Absatzpreis im vergangenen Monat berechnen:

- $U = p * x \rightarrow p = \frac{U}{x}$
- $p_1 = \frac{U_1}{x_1} = \frac{87.500}{17.500}$
- $p_1 = 5\text{ €}$

Gewinnfunktion › Aufgabe 2

2. Preis-Absatz-Funktion (für den vergangenen Monat) aufstellen:

- $p_1 = 5, Sättigungsmenge = 20.000 = \alpha$
- $x_1 = 17.500 = 20.000 - \beta * 5 + (\beta * 5)$
- $17.500 + 5\beta = 20.000 - 17.500$
- $5\beta = 2.500\ /5$
- $\beta = 500$
- $x = 20.000 - 500 * p$

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

3. Umsatz im aktuellen Monat berechnen:

- $x = 20.000 - 500 * p$
- $p_2 = p_1 * 1{,}2 = 5 * 1{,}2 = 6\ €$
- $x_2 = 20.000 - 500 * 6 = 17.000$
- $U_2 = 6 * 17.000 = 102.000\ €$

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

4. Gewinn im aktuellen Monat berechnen:

- $x_2 = 17.000,\ U_2 = 102.000$
- $gesamte\ Stückkosten = 3{,}25\ € = \frac{K}{x} * x$
- $K_2 = 3{,}25 * x_2 = 3{,}25 * 17.000 = 55.250\ €$
- $G_2 = 102.000 - 55.250 = \underline{46.750\ €}$

Antwort: Der Gewinn im aktuellen Monat beträgt 46.750 €.

Gewinnfunktion › 2. Gewinnmaximum

- **optimale Absatzmenge (allgemein):**

$x = \alpha - \beta * p, K = c + d * (\alpha - \beta * p)$	$p = a - b * x, K = c + d * x$
optimalen Absatzpreis bestimmen und einsetzen	1. Gewinnfunktion nach x ableiten 2. Ableitung = 0 setzen 3. Ableitung nach x umstellen

- **optimale Absatzmenge (lineare PAF, KF):**

  - $p = a - b * x, K = c + d * x \rightarrow G = a * x - b * x^2 - c - d * x$
  - $G' = a - b * 2 * x - d = 0 \; +(b * 2 * x)$
  - $2bx = a - d \; /2b$
  - $\underline{x^* = \frac{a-d}{2b}}$

- **optimaler Absatzpreis (allgemein):**

$x = \alpha - \beta * p, K = c + d * (\alpha - \beta * p)$	$p = a - b * x, K = c + d * x$
1. Gewinnfunktion nach p ableiten 2. Ableitung = 0 setzen 3. Ableitung nach p umstellen	optimale Absatzmenge bestimmen und einsetzen

- **optimaler Absatzpreis (lineare PAF, KF):**
  - $\mathrm{x} = \alpha - \beta * p, \mathrm{K} = \mathrm{c} + \mathrm{d} * (\alpha - \beta * p) \rightarrow \mathrm{G} = \alpha * p - \beta * p^2 - c - d * \alpha + d * \beta * p$
  - $G' = \alpha - \beta * 2 * p + d * \beta = 0 \; +(\beta * 2 * p)$
  - $2\beta p = \alpha + d\beta \; /2\beta$
  - $\underline{p^* = \frac{\alpha + d\beta}{2\beta}}$

Gewinnfunktion › 2. Gewinnmaximum

- **optimale Absatzmenge (I. PAF, KF):**
    - $p^* = \frac{\alpha+\beta d}{2\beta}$ in $x = \alpha - \beta * p$
    - $x^* = \alpha - \beta * \frac{\alpha+\beta d}{2\beta} = \alpha - \frac{\alpha+\beta d}{2}$
    - $\underline{x^* = \frac{\alpha-\beta d}{2}}$

- **optimaler Absatzpreis (I. PAF, KF):**
    - $x^* = \frac{a-d}{2b}$ in $p = a - b * x$
    - $p^* = a - b * \frac{a-d}{2b} = a - \frac{a-d}{2}$
    - $\underline{p^* = \frac{a+d}{2}}$

Gewinnfunktion › 2. Gewinnmaximum

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

- **Gewinnmaximum:**
  - $G = U - K$
  - $G' = U' - K' = 0 \; +K'$
  - $U' = K'$ (Grenzumsatz = Grenzkosten)
- **Grenzumsatz = Grenzkosten:**
  - $a - 2bx = d$ (**Grenzgewinn:** $a - 2bx - d$)
  - $K(p) = c + d * (\alpha - \beta * p) = c + d * \alpha - d * \beta * p \rightarrow K'(p) = -d * \beta$
  - $\alpha - 2\beta p = -d\beta$ (**Grenzgewinn:** $\alpha - 2\beta p + d\beta$)

Gewinnfunktion › 2. Gewinnmaximum

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

- **Amoroso-Robinson-Relation:**
  - $U(x) = p(x) * x$
  - $U'(x) = \frac{\Delta p}{\Delta x} * x + p$
  - $U' = p * \left(\frac{\Delta p}{\Delta x} * \frac{x}{p} + 1\right)$
  - $U' = p * \left(\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta p} * \frac{p}{x}} + 1\right)$
  - $\underline{U' = p * \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)}$
  - $U' = p + \frac{p}{\varepsilon} * \varepsilon$
  - $U' * \varepsilon = p * \varepsilon + p$
  - $U' * \varepsilon = p * (\varepsilon + 1) \; /(\varepsilon + 1)$
  - $p = \frac{U' * \varepsilon}{\varepsilon + 1}$
  - **Gewinnmaximum:** $U' = K'$
  - $\underline{p^* = \frac{K' * \varepsilon}{\varepsilon + 1} = \frac{\Delta K}{\Delta x} * \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}}$

Gewinnfunktion › 2. Gewinnmaximum

Entscheidungs-parameter	p	x
Erwartungsparameter	x	p
Beispiel	$x = \alpha - \beta * p$	$p = a - b * x$
optimale Absatzmenge	$x^* = (\alpha - \beta d)/2$	$x^* = (a - d)/2b$
optimaler Absatzpreis	$p^* = (\alpha + \beta d)/2\beta$	$p^* = (a + d)/2$
Gewinnmaximum	$U' = K'$	
	$\alpha - 2\beta p = -d\beta$	$a - 2bx = d$
Grenzgewinn	$\alpha - 2\beta p + d\beta$	$a - 2bx - d$
Amoroso-Robinson-Relation	$U' = p * \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \rightarrow p^* = \frac{K' * \varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{\Delta K}{\Delta x} * \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$	

Aufgabe 3: Wie hoch ist die Preiselastizität im Gewinnmaximum, wenn die Preis-Absatz-Funktion $x = 1.000.000 - 50 * p$ und die Kostenfunktion $K = 400.000 + 20 * x$ zugrunde liegen?

1. optimale Absatzmenge und optimalen Absatzpreis berechnen:

- $x = 1.000.000 - 50 * p \; +50 * p$
- $x + 50p = 1.000.000 \; -x$
- $50p = 1.000.000 - x \; /50$
- $p = 20.000 - 0{,}02x$
- **Kontrolle:** $b = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{50} = 0{,}02,\; a = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1.000.000}{50} = 20.000$

Gewinnfunktion › Aufgabe 3

1. optimale Absatzmenge und optimalen Absatzpreis berechnen:

- $p = 20.000 - 0{,}02x,\ K = 400.000 + 20x$
- $U = 20.000x - 0{,}02x^2$
- $G = 20.000x - 0{,}02x^2 - 400.000 - 20x$
- $G' = 20.000 - 0{,}04x - 20 = 19.980 - 0{,}04x$
- $0 = 19.980 - 0{,}04x\ +0{,}04x$
- $0{,}04x = 19.980\ /0{,}04$
- $x^* = 499.500$

Gewinnfunktion › Aufgabe 3

1. optimale Absatzmenge und optimalen Absatzpreis berechnen:

- $p = 20.000 - 0{,}02x,\ x^* = 499.500$
- $p = 20.000 - 0{,}02 * 499.500$
- $p^* = 10.010$
- **Kontrolle:**
  - $x^* = \frac{\alpha - \beta d}{2} = \frac{1.000.000 - 50 * 20}{2} = 499.500$
  - $p^* = \frac{\alpha + \beta d}{2\beta} = \frac{1.000.000 + 50 * 20}{2 * 50} = 10.010$

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

2. Preiselastizität im Gewinnmaximum berechnen:

- $x = 1.000.000 - 50 * p, * x^* = 499.500, p^* = 10.010$
- $x' = -50$
- $\varepsilon = -50 * \frac{10.010}{499.500}$
- $\varepsilon = \underline{-1,\overline{002}}$

Antwort: Die Preiselastizität im Gewinnmaximum beträgt rund -1,002.

Gewinnfunktion › Aufgabe 3

Zusatzaufgabe: Wie hoch ist hier der Grenzgewinn?

- $x = 1.000.000 - 50p,\ p = 20.000 - 0{,}02x,\ K = 400.000 + 20x$
- $G'(p) = \alpha - 2\beta p + d\beta$
- $G'(p) = 1.000.000 - 2 * 50 * p + 20 * 50$
- $G'(p) = \underline{1.001.000 - 100p}$
- $G'(x) = a - 2bx - d$
- $G'(x) = 20.000 - 2 * 0{,}02 * x - 20$
- $G'(x) = \underline{19.980 - 0{,}04x}$

Gewinnfunktion › Aufgabe 4

Aufgabe 4: Ein Unternehmen steht vor der Frage, ob es ein neues Produkt einführen soll. Das Produkt soll zu einem Preis von 2 € verkauft werden. Es werden ein Prohibitivpreis von 100 € und eine Sättigungsmenge von 50 angenommen. Die Fixkosten betragen 30 € und die variablen Stückkosten 5 €. Lohnt sich die Produkteinführung, wenn der Betrachtungszeitraum ein Jahr beträgt?

- $Prohibitivpreis = 100 = a$
- $Sättigungsmenge = 50 = \frac{a}{b} = \frac{100}{b} * b$
- $50b = 100 \; /50$
- $b = 2$
- $2 = 100 - 2 * x \; +2 * x$

Gewinnfunktion › Aufgabe 4

- $2 + 2x = 100 \quad -2$
- $2x = 98 \quad /2$
- $x = 49$
- $U = 49 * 2 = 98\ €$
- $K = 30 + 5 * 49 = 275\ €$
- $G = 98 - 275 = \underline{-177\ €}$

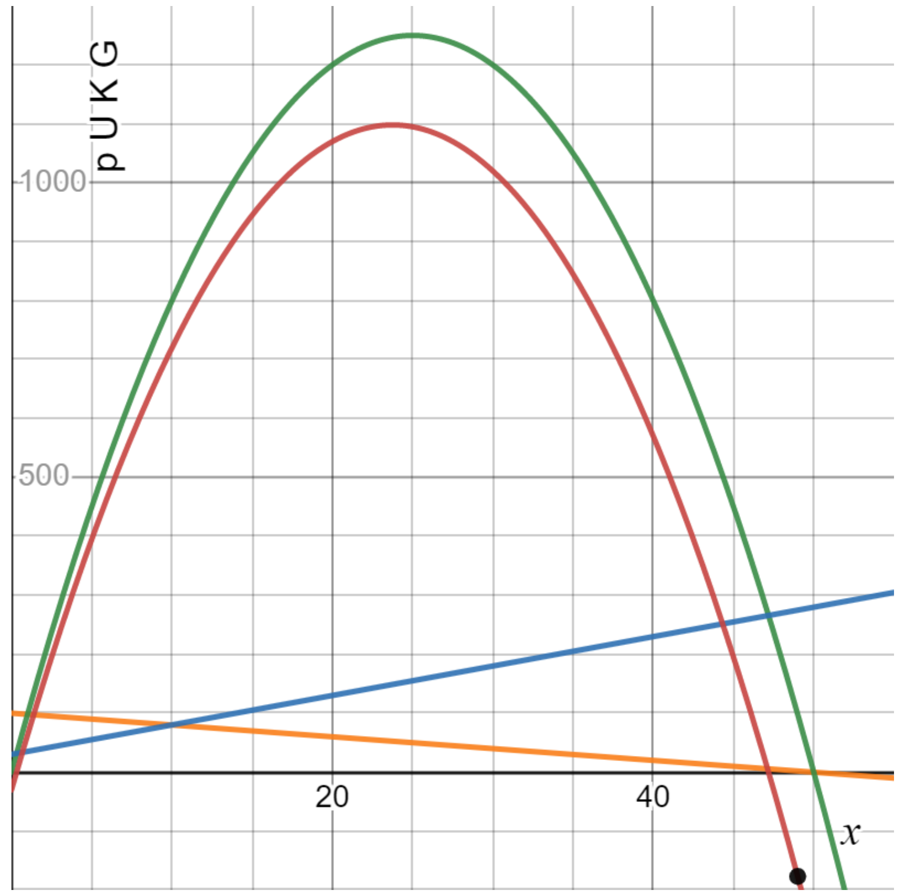
Antwort: Die Produkteinführung lohnt nicht, da ein Verlust von 177 € pro Jahr erzielt werden würde.

Gewinnfunktion › Aufgabe 4

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

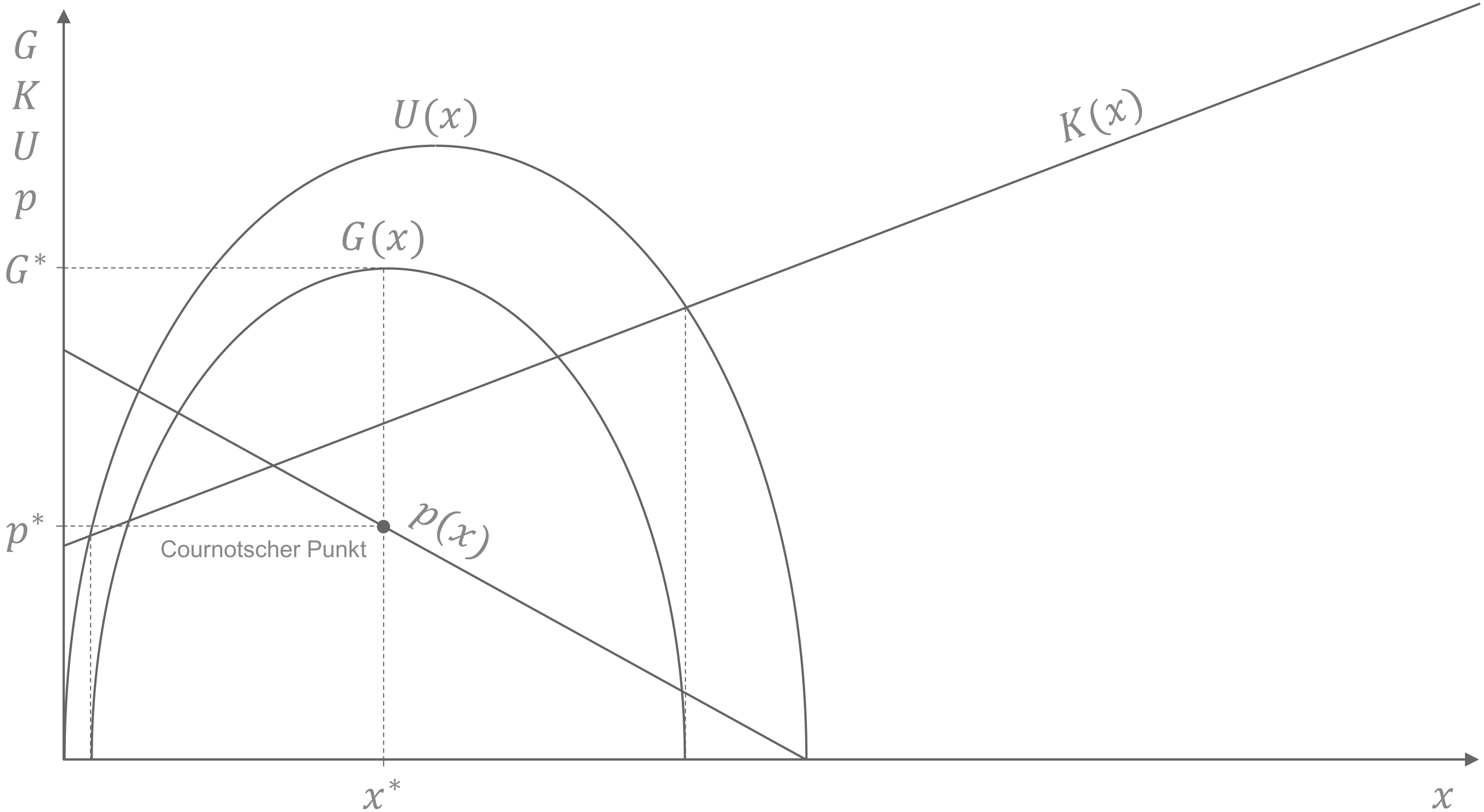
Zusatzaufgabe: Wo liegt der Punkt auf der Gewinnfunktion?

- $p = 100 - 2x$
- $U = 100x - 2x^2$
- $K = 30 + 5x$
- $G = 100x - 2x^2 - 30 - 5x$
- $x = 49$
- $G = -177$

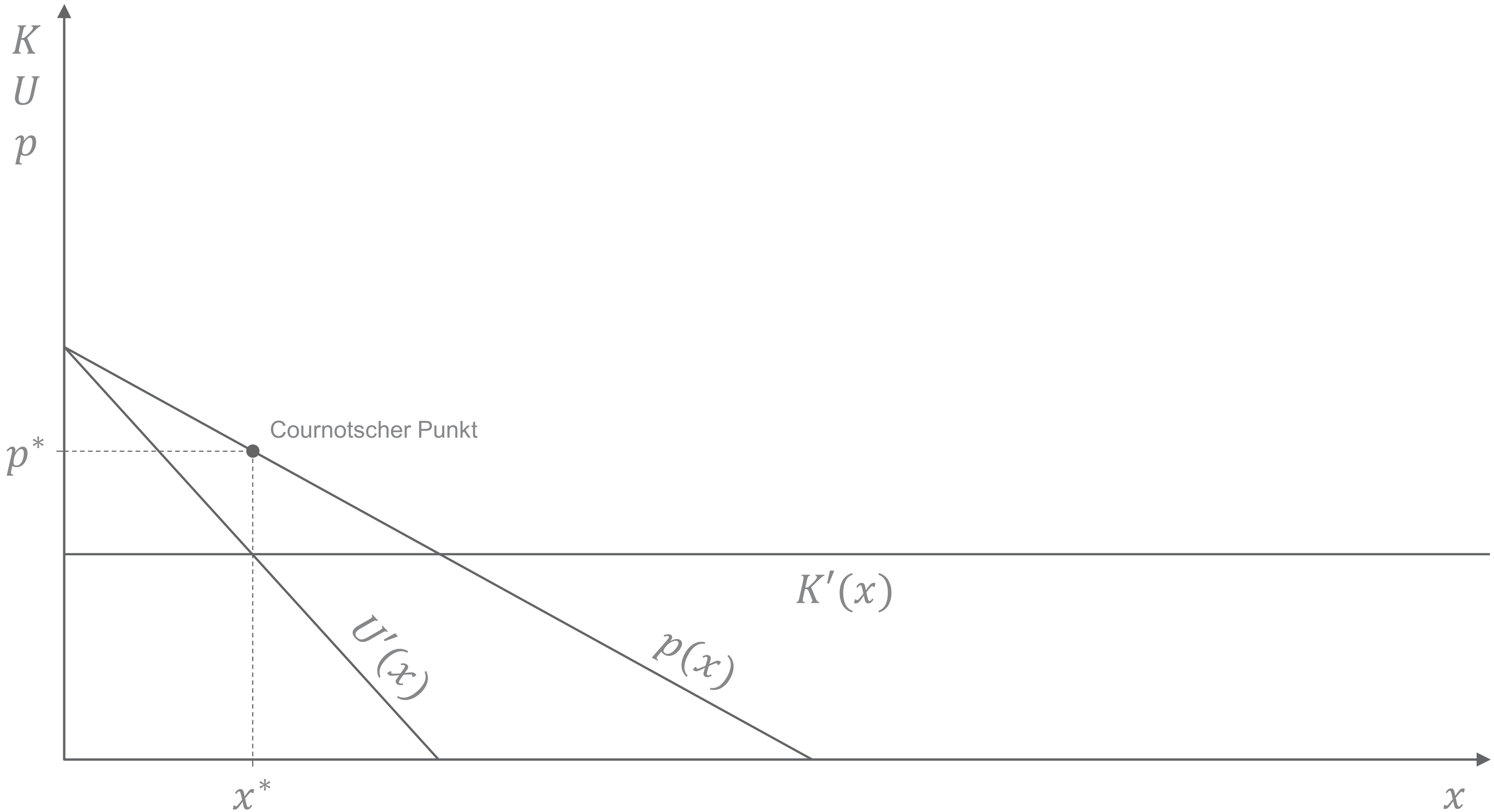


erstellt mit desmos.com

Gewinnfunktion › 3. grafische Darstellung



Gewinnfunktion › 3. grafische Darstellung



Gewinnfunktion › Aufgabe 5

Aufgabe 5: Eine Händlerin verkauft an 5 Tagen in der Woche gefüllte Obstkörbe auf dem Markt. Das Obst kauft Sie für insgesamt 10 € pro Korb bei lokalen Landwirtinnen und Landwirten ein, die Körbe für jeweils 3 €. Zu einem Preis von 20 € verkauft die Händlerin 40 gefüllte Obstkörbe pro Tag. Die Standgebühr beträgt 250 € pro Woche. Aus Erfahrung weiß die Händlerin, dass sie ab einem Preis von 30 € keine Obstkörbe mehr verkauft. Um wie viel Prozent könnte die Händlerin ihren Gewinn maximal steigern? Um wie viele Euro müsste Sie dazu Ihren Verkaufspreis anpassen?

1. Gewinnfunktion aufstellen:

- $Prohibitivpreis = 30 = a$
- $20 = 30 - b * 40 \; {+b * 40}$
- $20 + 40b = 30 \; {-20}$

Gewinnfunktion › Aufgabe 5

1. Gewinnfunktion aufstellen:

- $40b = 10 \; /40$
- $b = 0{,}25$
- $p = 30 - 0{,}25x$
- $U = 30x - 0{,}25x^2$
- $c_{Tag} = \frac{250}{5} = 50 \text{ €}$
- $d = 10 + 3 = 13 \text{ €}$
- $K = 50 + 13x$
- $G = 30x - 0{,}25x^2 - 50 - 13x$
- $G = 17x - 0{,}25x^2 - 50$

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

2. Preisänderung und Gewinnsteigerung berechnen:

- $G = 17x - 0{,}25x^2 - 50$
- $G' = 17 - 0{,}5x = 0 \quad +0{,}5x$
- $0{,}5x = 17 \quad * 2$
- $x^* = 34$
- $p = 30 - 0{,}25 * 34$
- $p^* = 21{,}5\ €$

2. Preisänderung und Gewinnsteigerung berechnen:

- $\mathrm{x} = 40,\ \mathrm{p} = 20,\ \mathrm{c} = 50,\ \mathrm{d} = 13,\ \mathrm{x}^* = 34,\ \mathrm{p}^* = 21{,}5$
- $G_{bisher} = 40 * 20 - 50 - 13 * 40 = 230\ €$
- $G^* = 34 * 21{,}5 - 50 - 13 * 34 = 239\ €$
- $\frac{\Delta G}{G} = \frac{239-230}{230} \approx 0{,}039 \rightarrow \underline{+3{,}9\ \%}$
- $\Delta p = 21{,}5 - 20 = \underline{+1{,}5\ €}$

Antwort: Die Händlerin müsste ihren Preis um 1,5 € anheben, um ihren Gewinn um 3,9 % zu steigern.

Aufgabe 6: Zu einem Preis von 500 € werden 50 Produkte verkauft. Wenn der Absatzpreis um 1 % steigt, sinkt die Absatzmenge um 2 %. Die Preis-Absatz-Funktion ist vom Cobb-Douglas-Typ und die Kostenfunktion linear, mit Fixkosten von 15.000 € und Grenzkosten von 30 €. Sollte der Preis angepasst werden, wenn der Gewinn maximiert werden soll?

1. Gewinnfunktion aufstellen:

- $\varepsilon = -2 = \beta$
- $50 = \alpha * 500^{-2} = \alpha * 0{,}000004$ $/0{,}000004$
- $\alpha = 12.500.000$
- $x = 12.500.000 * p^{-2}$

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

1. Gewinnfunktion aufstellen:

- $x = 12.500.000 * p^{-2}$
- $U = 12.500.000 * p^{-2} * p = 12.500.000 * p^{-1}$
- $Grenzkosten = 30 = d$
- $K = 15.000 + 30 * (12.500.000 * p^{-2})$
- $G = 12.500.000 * p^{-1} - 15.000 - 30 * (12.500.000 * p^{-2})$
- $G = 12.500.000p^{-1} - 15.000 - 375.000.000p^{-2}$

Gewinnfunktion › Aufgabe 6

2. optimalen Absatzpreis berechnen:

- $G = 12.500.000p^{-1} - 15.000 - 375.000.000p^{-2}$
- $G' = -12.500.000p^{-2} + 750.000.000p^{-3} = 0$
- $(-12.500.000p + 750.000.000) * p^{-3} = 0$ → entweder $p^{-3} = 0$ $(p = 0)$ oder…
- $-12.500.000p + 750.000.000 = 0$ $+12.500.000p$
- $12.500.000p = 750.000.000$ $/12.500.000$
- $p^* = \underline{60\ €}$

Antwort: Der Preis sollte auf 60 € gesenkt werden.