Annuitätenmethode

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

Eine **Annuität** (A) ist eine regelmäßige Zahlung in gleicher Höhe.

- gesucht: A

$$A = \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} * D \qquad A = \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} * K_0$$

- gegeben:
  - (Kalkulations-) Zinssatz (i)
  - Perioden (n)
  - Darlehenshöhe (D), Kapitalwert (K_0) o.Ä.

Annuitätenmethode › Aufgabe 1

Zwei Personen haben zusammen 80.000 € gespart und wollen dieses Geld in den Kauf einer 320.000 € teuren Immobilie einbringen. Die Differenz soll über ein Annuitätendarlehen finanziert werden, welches einen Zinssatz von 1,9 % pro Jahr über die Laufzeit von 10 Jahre garantiert. Nach diesen 10 Jahren bleibt eine Restschuld von 100.000 € übrig. Wie hoch ist die Annuität des Darlehens?

Annuitätenmethode › Aufgabe 1

Zwei Personen haben zusammen 80.000 € gespart und wollen dieses Geld in den Kauf einer 320.000 € teuren Immobilie einbringen. Die Differenz soll über ein Annuitätendarlehen finanziert werden, welches einen Zinssatz von 1,9 % pro Jahr über die Laufzeit von 10 Jahre garantiert. Nach diesen 10 Jahren bleibt eine Restschuld von 100.000 € übrig. Wie hoch ist die Annuität des Darlehens?

- Annuitätenmethode
- gesucht: A
- gegeben:
    - $D = 320.000 - 80.000 - 100.000 = 140.000\,€$
    - $i = 0{,}019$
    - $n = 10\ Jahre$

Annuitätenmethode › Aufgabe 1

$$A = \frac{i * (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} * D$$

- $A = \frac{0{,}019 * 1{,}019^{10}}{1{,}019^{10} - 1} * 140.000$
- $A \approx \underline{15.504{,}28 \text{ €}}$

Antwort: Die Annuität des Darlehens beträgt rund 15.504,28 €.

Annuitätenmethode › Aufgabe 2

Investitionsobjekt A hat eine Nutzungsdauer von 4 Jahren. Nach einer Anschaffungsauszahlung von 300.000 € generiert dieses Investitionsobjekt jährlich 120.000 € an Einzahlungsüberschüssen. Investitionsobjekt B hat eine Nutzungsdauer von 2 Jahren. Nach einer Anschaffungsauszahlung von 150.000 € generiert dieses Investitionsobjekt jährlich 115.000 € an Einzahlungsüberschüssen. Welche Investition ist auf Basis der Annuitätenmethode, bei einem Kalkulationszinssatz von 12 %, zu bevorzugen?

Annuitätenmethode › Aufgabe 2

Investitionsobjekt A hat eine Nutzungsdauer von 4 Jahren. Nach einer Anschaffungsauszahlung von 300.000 € generiert dieses Investitionsobjekt jährlich 120.000 € an Einzahlungsüberschüssen. Investitionsobjekt B hat eine Nutzungsdauer von 2 Jahren. Nach einer Anschaffungsauszahlung von 150.000 € generiert dieses Investitionsobjekt jährlich 115.000 € an Einzahlungsüberschüssen. Welche Investition ist auf Basis der Annuitätenmethode, bei einem Kalkulationszinssatz von 12 %, zu bevorzugen?

- Annuitätenmethode
- gesucht: A_A, A_B
- Zwischenschritt: Berechnung von K_{0A} und K_{0B}

- gegeben:
  - $n_A = 4\,Jahre$
  - $A_{0A} = 300.000\,€$
  - $e_{nA} - a_{nA} = 120.000\,€$
  - $n_B = 2\,Jahre$
  - $A_{0B} = 150.000\,€$
  - $e_{nB} - a_{nB} = 115.000\,€$
  - $i = 0{,}12$

Annuitätenmethode › Aufgabe 2

$$K_{0A} = -A_{0A} + \frac{e_{1A} - a_{1A}}{(1+i)^1} + \frac{e_{2A} - a_{2A}}{(1+i)^2} + \frac{e_{3A} - a_{3A}}{(1+i)^3}$$

- $K_{0A} = -300.000 + \frac{120.000}{1{,}12} + \frac{120.000}{1{,}12^2} + \frac{120.000}{1{,}12^3} + \frac{120.000}{1{,}12^4}$
- $K_{0A} \approx 64.481{,}92$
- $A_A = \frac{0{,}12 * 1{,}12^4}{1{,}12^4 - 1} * 64.481{,}92$
- $A_A \approx \underline{21.229{,}67}$

Annuitätenmethode › Aufgabe 2

- $K_{0A} \approx 64.481{,}92$
- $A_A \approx \underline{21.229{,}67}$
- $K_{0B} = -150.000 + \frac{115.000}{1{,}12} + \frac{115.000}{1{,}12^2}$
- $K_{0B} \approx 44.355{,}87$
- $A_B = \frac{0{,}12 * 1{,}12^2}{1{,}12^2 - 1} * 44.355{,}87$
- $A_B \approx \underline{26.245{,}28}$
- $26.245{,}28 > 21.229{,}67$

Antwort: Investition B ist auf Basis der Annuitätenmethode zu bevorzugen, da sie die größere Annuität besitzt.

Annuitätenmethode › Aufgabe 3

Ein Unternehmen nimmt einen Kredit in Höhe von 6,5 Mio. € auf, der in 5 gleich hohen jährlichen Raten zurückzuzahlen ist. Diese Raten umfassen sowohl die Zinsen, in Höhe von 4,3 % pro Jahr, als auch die Tilgung des Kredites. Wie sieht der Tilgungsplan (Höhe der Rückzahlung, Zinsen und Tilgung pro Jahr) dieses Kredites über die 5 Jahre aus?

Annuitätenmethode › Aufgabe 3

Ein Unternehmen nimmt einen Kredit in Höhe von 6,5 Mio. € auf, der in 5 gleich hohen jährlichen Raten zurückzuzahlen ist. Diese Raten umfassen sowohl die Zinsen, in Höhe von 4,3 % pro Jahr, als auch die Tilgung des Kredites. Wie sieht der Tilgungsplan (Höhe der Rückzahlung, Zinsen und Tilgung pro Jahr) dieses Kredites über die 5 Jahre aus?

- Annuitätenmethode
- gesucht: A, sowie Zins und Tilgung pro Jahr
- gegeben:
  - $D = 6.500.000$ €
  - $n = 5\ Jahre$
  - $i = 0{,}043$

Annuitätenmethode › Aufgabe 3

- $A = \frac{0{,}043 * 1{,}043^5}{1{,}043^5 - 1} * 6.500.000$

- $A = 1.472.403{,}30\ €$

- **Tilgungsplan:**

Jahr	Annuität	Zins $(Restschuld * Zinssatz)$	Tilgung $(Annuität - Zins)$	(Rest-) Schuld $(Restschuld - Tilgung)$
0				6.500.000,00 €
1		279.500,00 €	1.192.903,30 €	5.307.096,70 €
2		228.205,16 €	1.244.198,14 €	4.062.898,56 €
3	1.472.403,30 €	174.704,64 €	1.297.698,66 €	2.765.199,90 €
4		118.903,60 €	1.353.499,70 €	1.411.700,20 €
5		60.703,11 €	1.411.700,19 €	0,01 €

Annuitätenmethode › Zusatzaufgabe 1

a) Wie hoch muss ein jährliches Nettogehalt sein, um nach 40 Jahren Berufsleben (ohne Berücksichtigung von Lebenshaltungskosten) von 0 € Startkapital auf ein Vermögen von 1.000.000 € zu kommen, wenn Geld zu 2,8 % pro Jahr angelegt werden kann? **b)** Wie hoch ist eine jährliche Rente, wenn die Restlebenserwartung nach Ende des Berufslebens 25 Jahre beträgt und die gesparten 1.000.000 € in diesem Zeitraum komplett aufgebraucht und bis dahin (anteilig) weiter zu 2,8 % pro Jahr angelegt werden sollen?

Annuitätenmethode › Zusatzaufgabe 1 a)

a) Wie hoch muss ein jährliches Nettogehalt sein, um nach 40 Jahren Berufsleben (ohne Berücksichtigung von Lebenshaltungskosten) von 0 € Startkapital auf ein Vermögen von 1.000.000 € zu kommen, wenn Geld zu 2,8 % pro Jahr angelegt werden kann?

- $A = RVF * K_n$
- **Restwertverteilungsfaktor:** $RVF = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$
- $A = \frac{0{,}028}{1{,}028^{40} - 1} * 1.000.000 = \underline{13.874{,}86822\ €}$
- **Kontrolle:** $13.874{,}86822 * 1{,}028^{40} + 13.874{,}86822 * \frac{1{,}028^{40} - 1}{1{,}028 - 1} = 1.041.874{,}868\ €$

Antwort: Ein jährliches Nettogehalt muss rund 13.874,87 € betragen.

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

b) Wie hoch ist eine jährliche Rente, wenn die Restlebenserwartung nach Ende des Berufslebens 25 Jahre beträgt und die gesparten 1.000.000 € in diesem Zeitraum komplett aufgebraucht und bis dahin (anteilig) weiter zu 2,8 % pro Jahr angelegt werden sollen?

- Annuitätenmethode
- gesucht: A
- gegeben:
  - $n = 25\,Jahre$
  - $K = 1.000.000\,€$
  - $i = 0{,}028$

Annuitätenmethode › Zusatzaufgabe 1 b)

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

- $A = \frac{0{,}028 * 1{,}028^{25}}{1{,}028^{25} - 1} * 1.000.000$

- $A \approx \underline{56.155{,}65\ €}$

Antwort: Die jährliche Rente beträgt rund 56.155,65 €

- **Veranschaulichung:**

Jahr	Rente	Zinsen	Kapitalverzehr	Restkapital
0				1.000.000,00 €
1	56.155,65 €	28.000 €	28.155,65 €	971.844,35 €
2		27.211,64 €	28.944,01 €	942.900,34 €
3		26.401,21 €	29.754,44 €	913.145,90 €
4	…			

Rente & ewige Rente

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

Eine **Rente** (c) ist eine <u>regelmäßige Zahlung in gleicher Höhe.</u>

- gesucht: Barwert einer (ewigen) Rente (E)
- gegeben:
  - Rente (c)
  - Kalkulationszinssatz (i)

Rente ($n < 30$)	**ewige Rente** ($n \geq 30$)
$E = c * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}$	$E = \frac{c}{i}$

Rente & ewige Rente › Aufgabe 1

Bei einer Lotterie kann entweder ein einmaliges Preisgeld in Höhe von 200.000 € oder eine lebenslange (n > 30) jährliche Zahlung in Höhe von 10.000 € gewonnen werden. Welcher Gewinn ist zu bevorzugen, wenn der Kalkulationszinssatz 4,7 % beträgt?

Rente & ewige Rente › Aufgabe 1

Bei einer Lotterie kann entweder ein einmaliges Preisgeld in Höhe von 200.000 € oder eine lebenslange (n > 30) jährliche Zahlung in Höhe von 10.000 € gewonnen werden. Welcher Gewinn ist zu bevorzugen, wenn der Kalkulationszinssatz 4,7 % beträgt?

- ewige Rente (n > 30)
- gesucht: E im Vergleich mit 200.000 €
- gegeben:
  - $c = 10.000\ €$
  - $i = 0{,}047$

Rente & ewige Rente › Aufgabe 1

$$E = \frac{c}{i}$$

- $E = \frac{10.000}{0{,}047}$
- $E \approx 212.765{,}96\ €$
- $\underline{212.765{,}96\ € > 200.000\ €}$

Antwort: Die lebenslange jährliche Zahlung ist zu bevorzugen, da ihr Barwert größer ist, als das einmalige Preisgeld.

Rente & ewige Rente › Aufgabe 2

Der Barwert einer jährlichen Zahlung (über 40 Jahre) in gleicher Höhe beträgt 50.000 €. **a)** Wie hoch ist der Kalkulationszinssatz, wenn die Höhe dieser Zahlung 1.500 € beträgt? **b)** Wie hoch ist diese Zahlung, wenn der Kalkulationszinssatz 6 % beträgt?

Rente & ewige Rente › Aufgabe 2

Der Barwert einer jährlichen Zahlung (über 40 Jahre) in gleicher Höhe beträgt 50.000 €. **a)** Wie hoch ist der Kalkulationszinssatz, wenn die Höhe dieser Zahlung 1.500 € beträgt? **b)** Wie hoch ist diese Zahlung, wenn der Kalkulationszinssatz 6 % beträgt?

- ewige Rente (n > 30)
- gesucht: a) i, b) c
- gegeben:
  - $E = 50.000\ €$

    $a)\quad c = 1.500\ €$

    $b)\quad i = 0{,}06$

Rente & ewige Rente › Aufgabe 2

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

- $E = \frac{c}{i} \quad \rightarrow \quad i = \frac{c}{E}$
- $i = \frac{1.500}{50.000}$
- $i = \underline{0{,}03}$
- $E = \frac{c}{i} \quad \rightarrow \quad c = E * i$
- $c = 50.000 * 0{,}06$
- $c = \underline{3.000\ €}$

Antwort: a) Der Kalkulationszinssatz beträgt 3 %. **b)** Die Zahlung beträgt 3.000 €.

Rente & ewige Rente › Aufgabe 3

Ein Unternehmen erwartet aus der Vergabe von Lizenzen jedes Jahr Einzahlungen in Höhe von 3,2 Mio. €. Wie viel dürfen diese Lizenzen kosten, wenn der Planungshorizont bei 50 Jahren und der Kalkulationszinssatz bei 8 % liegen?

Rente & ewige Rente › Aufgabe 3

Ein Unternehmen erwartet aus der Vergabe von Lizenzen jedes Jahr Einzahlungen in Höhe von 3,2 Mio. €. Wie viel dürfen diese Lizenzen kosten, wenn der Planungshorizont bei 50 Jahren und der Kalkulationszinssatz bei 8 % liegen?

- ewige Rente (n > 30)
- gesucht: E
- gegeben:
  - $c = 3.200.000\ €$
  - $i = 0{,}08$

Rente & ewige Rente › Aufgabe 3

- $E = \frac{3.200.000}{0{,}08}$

- $E = \underline{40.000.000\ €}$

Antwort: Die Lizenzen dürfen nur weniger als 40.000.000 € kosten, damit sich ihr Kauf lohnt.

Rente & ewige Rente › Zusatzaufgabe 1

Eine Investition in Höhe von 150.000 € bringt eine Rente in Höhe von 60.000 € für 3 Jahre. Wie hoch ist der Barwert dieser Rente bei einem Kalkulationszinssatz von 4,5 %?

Rente & ewige Rente › Zusatzaufgabe 1

UNIVERSITÄT GREIFSWALD
Wissen lockt. Seit 1456

Eine Investition in Höhe von 150.000 € bringt eine Rente in Höhe von 60.000 € für 3 Jahre. Wie hoch ist der Barwert dieser Rente bei einem Kalkulationszinssatz von 4,5 %?

- Rente (n < 30)
- gesucht: E
- gegeben:
  - $c = 60.000\text{ €}$
  - $n = 3\ Jahre$
  - $i = 0{,}045$

Rente & ewige Rente › Zusatzaufgabe 1

- $E = c * \frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}$

- $E = 60.000 * \frac{1{,}045^3 - 1}{0{,}045 * 1{,}045^3}$

- $E \approx \underline{164.937{,}86\ €}$

- **Kontrolle:** $K_0 = \frac{60.000}{1{,}045} + \frac{60.000}{1{,}045^2} + \frac{60.000}{1{,}045^3} \approx 164.937{,}86\ €$

Antwort: Der Barwert dieser Rente beträgt rund 164.937,86 €.