

Umsatzfunktion

1. Grundlagen
2. grafische Darstellung
3. Umsatzmaximum

- **Umsatz** (bzw. Erlös): Gegenwert für den Verkauf von Gütern oder Dienstleistungen pro Periode
 - **mengenmäßiger Umsatz** entspricht der Absatzmenge pro Periode (x)
 - **wertmäßiger Umsatz** entspricht dem Absatzpreis (p) multipliziert mit der Absatzmenge pro Periode (x)
- **Umsatzfunktion:** funktionale Beziehung zwischen wertmäßigem Umsatz (U), Absatzpreis (p) und Absatzmenge pro Periode (x)
 - $U = U(p) = x(p) * p$
 - $U = U(x) = \underbrace{p(x)} * x$
Preis-Absatz-Funktion

- **Umsatzfunktion (linear):**

- $U = (\alpha - \beta * p) * p = \alpha * p - \beta * p^2$

- $U = (a - b * x) * x = a * x - b * x^2$

- **Umsatzfunktion (multiplikativ):**

- $U = \alpha * p^\beta * p = \alpha * p^{\beta+1}$, z.B. $U = 20 * 2^{-2} * 2 = 20 * 2^{-1} = 10$

- $U = a * x^b * x = a * x^{b+1}$, z.B. $U = 10 * 5^{-1} * 5 = 10 * 5^0 = 10$

- **Besonderheit:** konstanter Umsatz, bei $\beta = -1$ bzw. $b = -1$

Umsatzfunktion › Aufgabe 1

Aufgabe 1: Wie hoch ist der Umsatz bei einem Preis von 30 bzw. 50, wenn die Preis-Absatz-Funktion $x = 500 - 10 * p$ zugrunde liegt?

- $U = (500 - 10 * p) * p = 500p - 10p^2$
- $U_{p=30} = 500 * 30 - 10 * 30^2$
- $U_{p=30} = 15.000 - 9.000$
- $U_{p=30} = \underline{6.000}$

Umsatzfunktion › Aufgabe 1

Aufgabe 1: Wie hoch ist der Umsatz bei einem Preis von 30 bzw. 50, wenn die Preis-Absatz-Funktion $x = 500 - 10 * p$ zugrunde liegt?

- $U = 500p - 10p^2$
- $U_{p=50} = 500 * 50 - 10 * 50^2$
- $U_{p=50} = 25.000 - 25.000$
- $U_{p=50} = \underline{0}$

Antwort: Bei einem Preis 30 beträgt der Umsatz 6.000, bei einem Preis von 50 beträgt er 0.

Umsatzfunktion › Aufgabe 1

Aufgabe 1: Wie hoch ist der Umsatz bei einem Preis von 30 bzw. 50, wenn die Preis-Absatz-Funktion $x = 500 - 10 * p$ zugrunde liegt?

Zusatzfrage: Wie ist hier der Preis von 50 definiert?

- $p_{prohibitiv} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{500}{10} = 50$
- Der Umsatz für den Prohibitivpreis beträgt 0, da die Absatzmenge hier 0 beträgt.

Umsatzfunktion › Aufgabe 2

Aufgabe 2: Wie hoch ist der Umsatz bei einem Absatz von 200 bzw. 400, wenn die Preis-Absatz-Funktion $p = 1.200 - 3 * x$ zugrunde liegt?

- $U = (1.200 - 3 * x) * x = 1.200x - 3x^2$
- $U_{x=200} = 1.200 * 200 - 3 * 200^2$
- $U_{x=200} = 240.000 - 120.000$
- $U_{x=200} = \underline{120.000}$

Umsatzfunktion › Aufgabe 2

Aufgabe 2: Wie hoch ist der Umsatz bei einem Absatz von 200 bzw. 400, wenn die Preis-Absatz-Funktion $p = 1.200 - 3 * x$ zugrunde liegt?

- $U = 1.200x - 3x^2$
- $U_{x=400} = 1.200 * 400 - 3 * 400^2$
- $U_{x=400} = 480.000 - 480.000$
- $U_{x=400} = \underline{0}$

Antwort: Bei einem Absatz von 200 beträgt der Umsatz 120.000, bei einem Absatz von 400 beträgt er 0.

Umsatzfunktion › Aufgabe 2

Aufgabe 2: Wie hoch ist der Umsatz bei einem Absatz von 200 bzw. 400, wenn die Preis-Absatz-Funktion $p = 1.200 - 3 * x$ zugrunde liegt?

Zusatzfrage: Wie ist hier der Absatz von 400 definiert?

- $x_{\text{sättigungs}} = \frac{a}{b} = \frac{1.200}{3} = 400$
- Der Umsatz für die Sättigungsmenge beträgt 0, da der Absatzpreis hier 0 beträgt.



Aufgabe 3: Bei einem Preis von 100 werden 700 Produkte verkauft. Die Sättigungsmenge beträgt 750. Wie hoch ist der Umsatz bei einem Preis von 375, 750 und 937,5, wenn eine lineare Preis-Absatz-Funktion zugrunde liegt?

1. Umsatzfunktion aufstellen:

- $x_{\text{sättigungs}} = \alpha = 750$
- $700 = 750 - \beta * 100 + (\beta * 100)$
- $700 + 100\beta = 750 - 700$
- $100\beta = 50 / 100$
- $\beta = 0,5$
- $x = 750 - 0,5 * p$
- $U = (750 - 0,5 * p) * p$
- $U = 750p - 0,5p^2$

Aufgabe 3: Bei einem Preis von 100 werden 700 Produkte verkauft. Die Sättigungsmenge beträgt 750. Wie hoch ist der Umsatz bei einem Preis von 375, 750 und 937,5, wenn eine lineare Preis-Absatz-Funktion zugrunde liegt?

2. Umsätze berechnen:

- $U_{p=375} = 750 * 375 - 0,5 * 375^2 = \underline{210.937,5}$
- $U_{p=750} = 750 * 750 - 0,5 * 750^2 = \underline{281.250}$
- $U_{p=937,5} = 750 * 937,5 - 0,5 * 937,5^2 = \underline{263.671,875}$

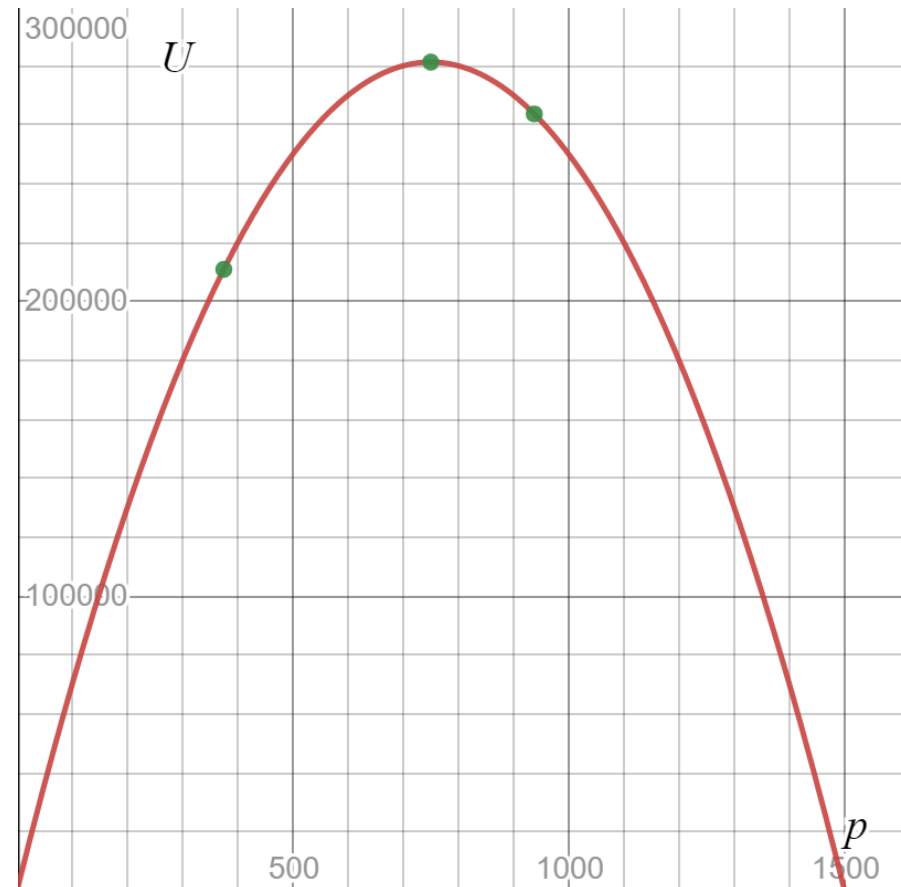
Antwort: Bei einem Preis von 375 beträgt der Umsatz rund 210.938, bei einem Preis von 750 beträgt er 281.250 und bei einem Preis von 937,5 rund 263.672.

Umsatzfunktion › Aufgabe 3

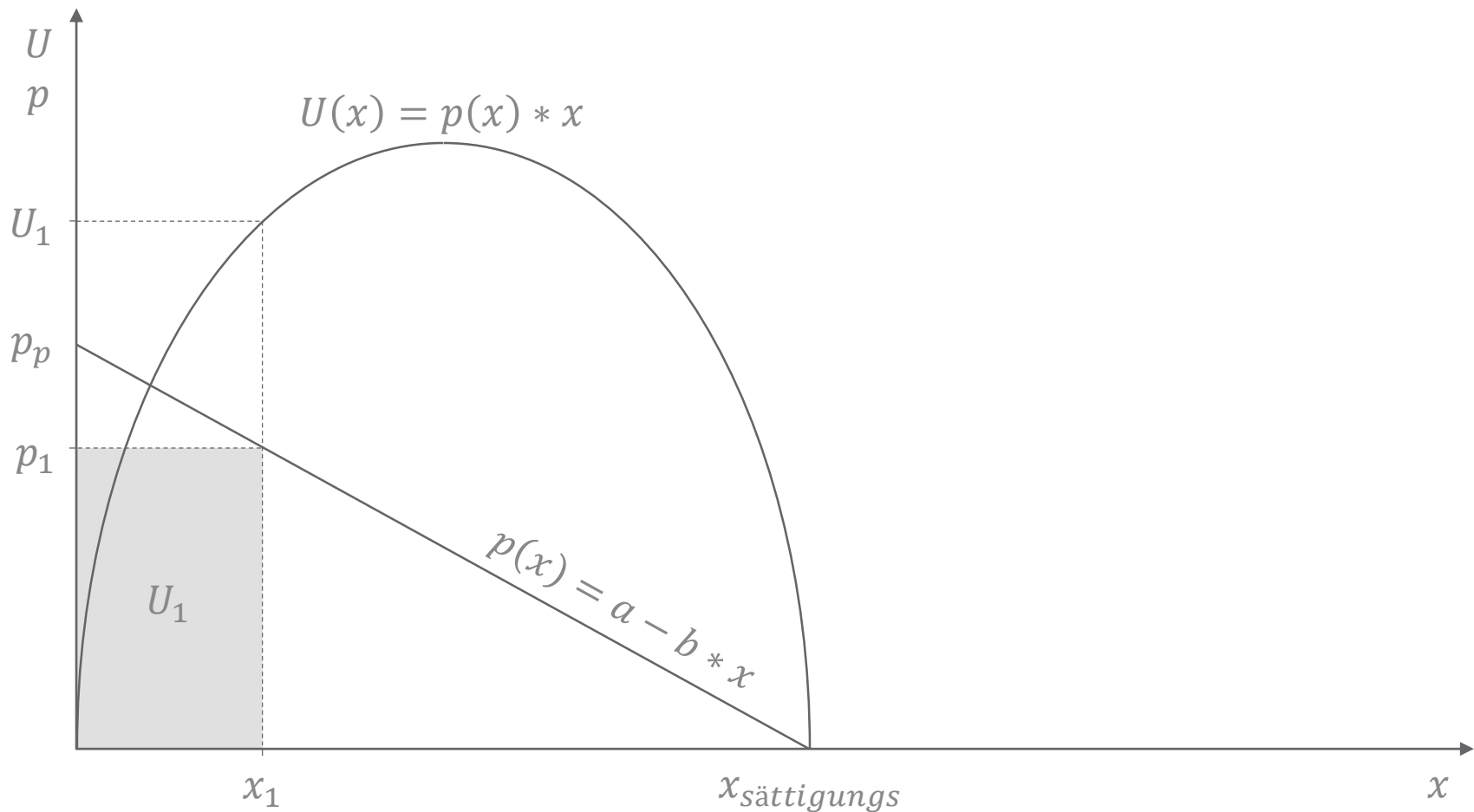
Zusatzfrage: Wo liegen die Punkte im Koordinatensystem? Wie verläuft die Umsatzfunktion?

- $U_{p=375} = 210.937,5$
- $U_{p=750} = 281.250$
- $U_{p=937,5} = 263.671,875$

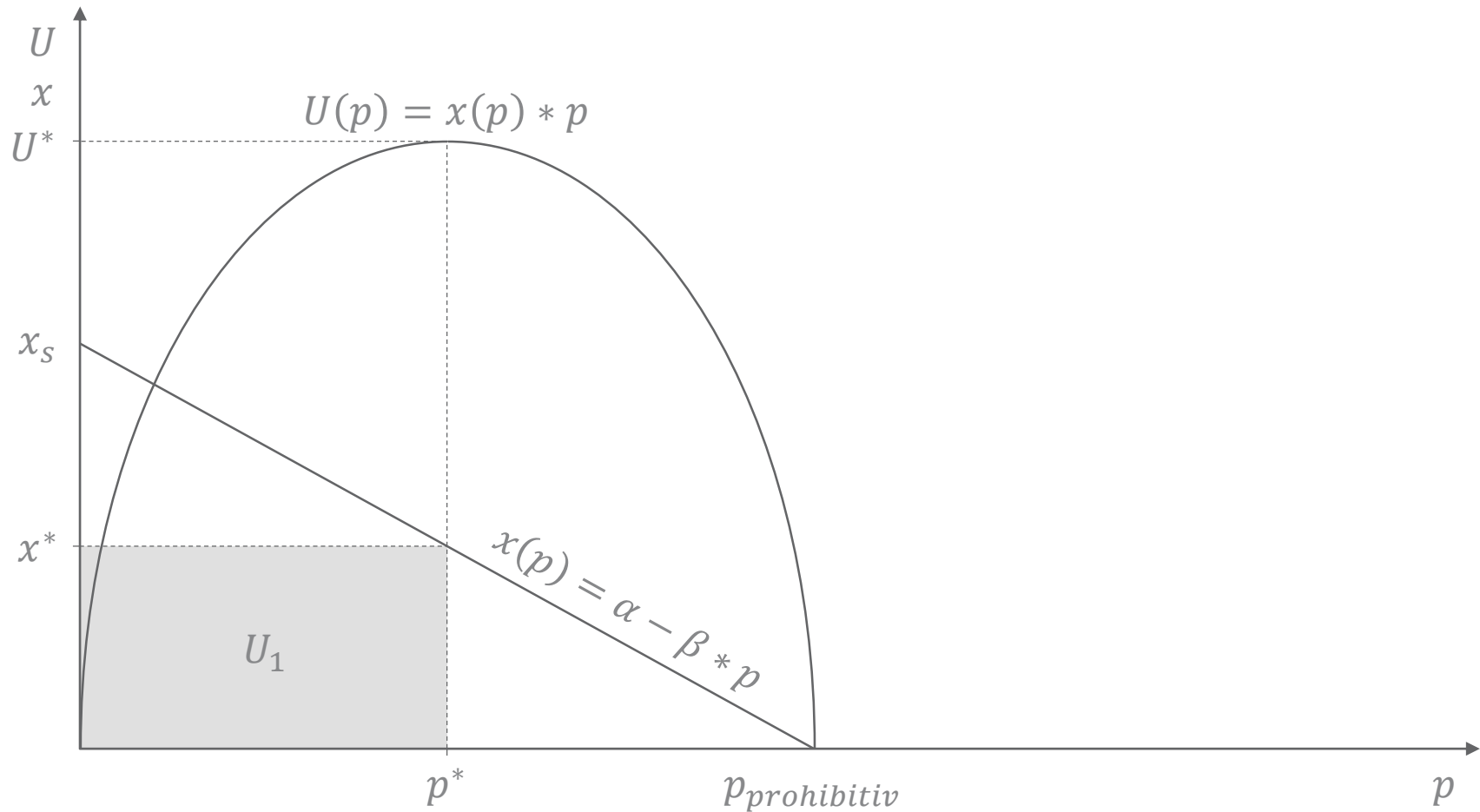
erstellt mit [desmos.com](https://www.desmos.com)



Umsatzfunktion › 2. grafische Darstellung



Umsatzfunktion › 2. grafische Darstellung

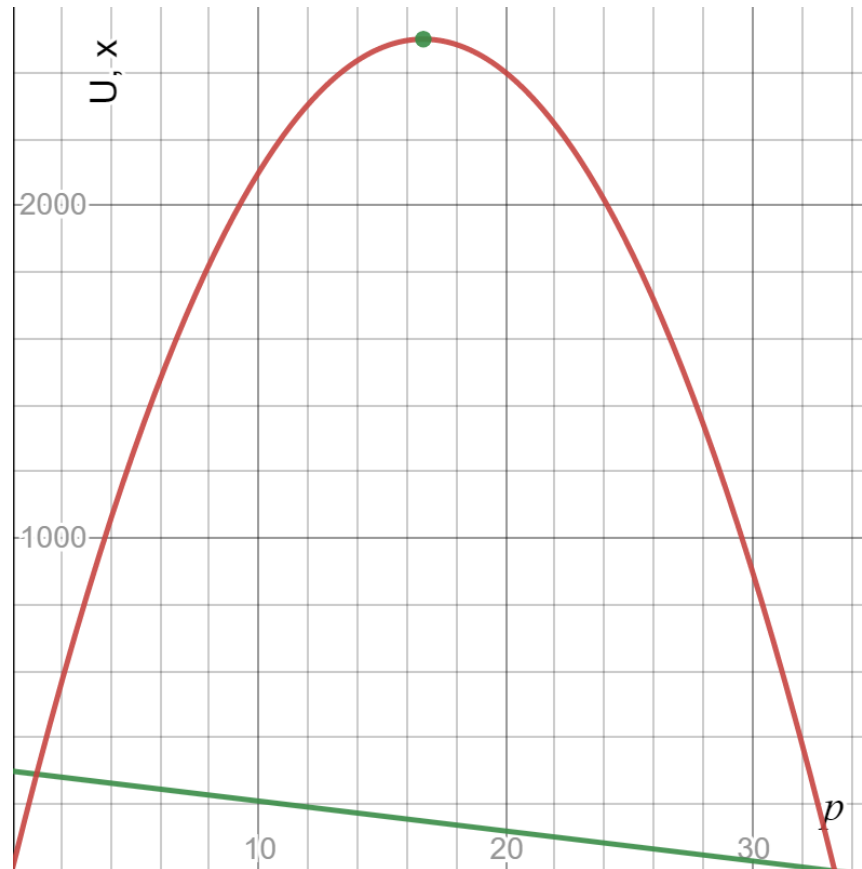


Umsatzfunktion › Aufgabe 4

Aufgabe 4: Wo liegt das Umsatzmaximum der Preis-Absatz-Funktion $x = 300 - 9 * p$ im Koordinatensystem?

- $U = 300p - 9p^2$
- $U^*(16, \bar{6}; 2.500)$

erstellt mit [desmos.com](https://www.desmos.com)



Umsatzfunktion › 3. Umsatzmaximum

- **optimale Absatzmenge (allgemein):**

| | |
|--|---|
| $x = \alpha - \beta * p$ | $p = a - b * x$ |
| optimalen Absatzpreis bestimmen und einsetzen oder PAF umstellen | <ol style="list-style-type: none">1. Umsatzfunktion nach x ableiten2. Ableitung = 0 setzen3. Ableitung nach x umstellen |

- **optimale Absatzmenge (lineare PAF):**

- $p = a - b * x \rightarrow U = (a - b * x) * x = a * x - b * x^2$
- $U' = a - b * 2 * x = 0 + (b * 2 * x)$
- $2bx = a / 2b$

Umsatzfunktion › 3. Umsatzmaximum

- optimale Absatzmenge (lineare PAF):

- $x^* = \frac{a}{2b}$

- $x_{\text{sättigungs}} = \frac{a}{b} / 2$

- $\frac{x_{\text{sättigungs}}}{2} = \frac{a}{2b} = x^*$

Umsatzfunktion › 3. Umsatzmaximum

▪ optimaler Absatzpreis (allgemein):

| | |
|---|---|
| $x = \alpha - \beta * p$ | $p = a - b * x$ |
| <ol style="list-style-type: none">1. Umsatzfunktion nach p ableiten2. Ableitung = 0 setzen3. Ableitung nach p umstellen | optimale Absatzmenge bestimmen und einsetzen oder PAF umstellen |

▪ optimaler Absatzpreis (lineare PAF):

- $x = \alpha - \beta * p \rightarrow U = (\alpha - \beta * p) * p = \alpha * p - \beta * p^2$
- $U' = \alpha - \beta * 2 * p = 0 + (\beta * 2 * p)$
- $2\beta p = \alpha / 2\beta$

Umsatzfunktion › 3. Umsatzmaximum

- **optimaler Absatzpreis (lineare PAF):**

- $p^* = \frac{\alpha}{2\beta}$

- $p_{prohibitiv} = \frac{\alpha}{\beta} / 2$

- $\frac{p_{prohibitiv}}{2} = \frac{\alpha}{2\beta} = p^*$

Umsatzfunktion › 3. Umsatzmaximum



▪ optimale Absatzmenge (I. PAF):

- $p^* = \frac{\alpha}{2\beta}$ in $x = \alpha - \beta * p$

- $x^* = \alpha - \beta * \frac{\alpha}{2\beta} = \alpha - \frac{\alpha}{2}$

- $x^* = \frac{\alpha}{2}$

▪ optimaler Absatzpreis (I. PAF):

- $x^* = \frac{a}{2b}$ in $p = a - b * x$

- $p^* = a - b * \frac{a}{2b} = a - \frac{a}{2}$

- $p^* = \frac{a}{2}$

Umsatzfunktion › 3. Umsatzmaximum

- **Umsatzmaximum (allgemein):** optimale Absatzmenge oder optimalen Absatzpreis in Umsatzfunktion einsetzen
- **Umsatzmaximum (lineare PAF):**
 - $x^* = \frac{a}{2b}$ in $U = a * x - b * x^2$
 - $U = a * \frac{a}{2b} - b * \left(\frac{a}{2b}\right)^2$
 - $U = \frac{a^2}{2b} - \frac{b * a^2}{4b^2}$
 - $U = \frac{1}{2} * \frac{a^2}{b} - \frac{1}{4} * \frac{a^2}{b}$
 - $\underline{U^* = \frac{a^2}{4b}}$

Umsatzfunktion › 3. Umsatzmaximum

▪ Umsatzmaximum (lineare PAF):

- $p^* = \frac{\alpha}{2\beta}$ in $U = \alpha * p - \beta * p^2$

- $U = \alpha * \frac{\alpha}{2\beta} - \beta * \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2$

- $U = \frac{\alpha^2}{2\beta} - \frac{\beta * \alpha^2}{4\beta^2}$

- $U = \frac{1}{2} * \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{1}{4} * \frac{\alpha^2}{\beta}$

- $U^* = \frac{\alpha^2}{4\beta}$

▪ Grenzumsatz (lineare PAF):

- Umsatzänderung bei marginaler Absatzmengen- bzw. Absatzpreisänderung

- $U = (a - b * x) * x = a * x - b * x^2$

- $U' = a - b * 2 * x$

- $U' = a - 2bx$

- $U = (\alpha - \beta * p) * p = \alpha * p - \beta * p^2$

- $U' = \alpha - \beta * 2 * p$

- $U' = \alpha - 2\beta p$

Umsatzfunktion › 3. Umsatzmaximum

▪ Preiselastizität im Umsatzmaximum (lineare PAF):

- $p = a - b * x \rightarrow p' = \Delta p / \Delta x = -b \rightarrow \Delta x / \Delta p = -1/b$

- $p^* = a/2, x^* = a/2b$

- $\varepsilon = -\frac{1}{b} * \frac{a/2}{a/2b}$

- $\varepsilon = -\frac{1}{b} * \frac{a}{2} * \frac{2b}{a}$

- $\varepsilon = -1$

Umsatzfunktion › 3. Umsatzmaximum

▪ Preiselastizität im Umsatzmaximum (lineare PAF):

- $x = \alpha - \beta * p \rightarrow x' = -\beta$

- $p^* = \alpha/2\beta, x^* = \alpha/2$

- $\varepsilon = -\beta * \frac{\alpha/2\beta}{\alpha/2}$

- $\varepsilon = -\beta * \frac{\alpha}{2\beta} * \frac{2}{\alpha}$

- $\varepsilon = -1$

Umsatzfunktion › 3. Umsatzmaximum

| | | |
|--|---------------------------|-----------------|
| Entscheidungsparameter | p | x |
| Erwartungsparameter | x | p |
| Beispiel | $x = \alpha - \beta * p$ | $p = a - b * x$ |
| optimale Absatzmenge | $x_{\text{sättigungs}}/2$ | |
| | $x^* = \alpha/2$ | $x^* = a/2b$ |
| optimaler Absatzpreis | $p_{\text{prohibitiv}}/2$ | |
| | $p^* = \alpha/2\beta$ | $p^* = a/2$ |
| Umsatzmaximum | $\alpha^2/4\beta$ | $a^2/4b$ |
| Grenzumsatz | $\alpha - 2\beta p$ | $a - 2bx$ |
| Preiselastizität im Umsatzmaximum | -1 | |

Aufgabe 5: Wie hoch sind die optimale Absatzmenge, der optimale Absatzpreis und das Umsatzmaximum der Preis-Absatz-Funktion $x = 83.000 - 120p$?

1. optimalen Absatzpreis berechnen:

- $U = (83.000 - 120 * p) * p = 83.000p - 120p^2$
- $U' = 83.000 - 120 * 2 * p = 83.000 - 240p$
- $0 = 83.000 - 240p + 240p$
- $240p = 83.000 / 240$
- $p^* \approx \underline{345,83}$
- **Kontrolle:** $p^* = \frac{\alpha}{2\beta} = \frac{83.000}{2*120} \approx 345,83$

Aufgabe 5: Wie hoch sind die optimale Absatzmenge, der optimale Absatzpreis und das Umsatzmaximum der Preis-Absatz-Funktion $x = 83.000 - 120p$?

2. optimale Absatzmenge berechnen:

- $p^* = 345,83$
- $x = 83.000 - 120 * 345,83$
- $x^* \approx \underline{41.500}$
- **Kontrolle:** $x^* = \frac{\alpha}{2} = \frac{83.000}{2} = 41.500$



Aufgabe 5: Wie hoch sind die optimale Absatzmenge, der optimale Absatzpreis und das Umsatzmaximum der Preis-Absatz-Funktion $x = 83.000 - 120p$?

3. Umsatzmaximum berechnen:

- $p^* = 345,83, x^* = 41.500$
- $U^* = 345,83 * 41.500 = \underline{14.351.945}$
- oder: $U^* = 83.000 * 345,83 - 120 * 345,83^2 = 14.352.083,33$
- **Kontrolle:** $U^* = \frac{\alpha^2}{4\beta} = \frac{83.000^2}{4*120} = 14.352.083,33$

Antwort: Im Optimum beträgt der Umsatz 14.351.945, bei einem Preis von rund 345,83 und einer Absatzmenge von rund 41.500.



Aufgabe 5: Wie hoch sind die optimale Absatzmenge, der optimale Absatzpreis und das Umsatzmaximum der Preis-Absatz-Funktion $x = 83.000 - 120p$?

Zusatzfrage: Wie hoch sind hier Sättigungsmenge und Prohibitivpreis?

- $x_{\text{sättigungs}} = \alpha = 83.000$
- **Kontrolle:** $x^* = \frac{x_{\text{sättigungs}}}{2}, 41.500 = \frac{83.000}{2}$
- $p_{\text{prohibitiv}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{83.000}{120} \approx 691,67$
- **Kontrolle:** $p^* = \frac{p_{\text{prohibitiv}}}{2}, 345,83 \approx \frac{691,67}{2} = 345,835$

Umsatzfunktion › Aufgabe 6

Aufgabe 6: Wie hoch sind das Umsatzmaximum, der Grenzumsatz und die Preiselastizität im Umsatzmaximum der Preis-Absatz-Funktion $p = 14 - 0,7x$?

- $U = (14 - 0,7 * x) * x = 14x - 0,7x^2$
- $U' = 14 - 0,7 * 2 * x$
- $U' = \underline{14 - 1,4x}$
- **Kontrolle:** $U' = a - 2bx = 14 - 2 * 0,7 * x = 14 - 1,4x$

Umsatzfunktion › Aufgabe 6



Aufgabe 6: Wie hoch sind das Umsatzmaximum, der Grenzumsatz und die Preiselastizität im Umsatzmaximum der Preis-Absatz-Funktion $p = 14 - 0,7x$?

- $0 = 14 - 1,4x + 1,4x$
- $1,4x = 14 / 1,4$
- $x^* = 10$
- $U^* = 14 * 10 - 0,7 * 10^2 = 140 - 70$
- $U^* = \underline{70}$



Aufgabe 6: Wie hoch sind das Umsatzmaximum, der Grenzumsatz und die Preiselastizität im Umsatzmaximum der Preis-Absatz-Funktion $p = 14 - 0,7x$?

- $x^* = 10$
- $p' = \frac{\Delta p}{\Delta x} = -0,7 \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta p} = -\frac{1}{0,7}$
- $p = 14 - 0,7 * 10$
- $p^* = 7$
- $\varepsilon = -\frac{1}{0,7} * \frac{7}{10} = -\frac{7}{7} = \underline{\underline{-1}}$

Antwort: Das Umsatzmaximum beträgt 70, bei einer Elastizität von -1 . Der Grenzumsatz beträgt $14 - 1,4x$.